

# Convection naturelle instationnaire dans une géométrie répétitive périodiquement chauffée par le bas : analyse par la transformation rapide de Fourier

Samira Douamna, Mohammed Hasnaoui\*, Btissam Abourida

*Département de physique, LMFE, BP 2390, faculté des sciences Semlalia, Université Cadi-Ayyad, Marrakech, Maroc*

(Reçu le 26 juin 1998, accepté le 10 mars 1999)

*Abridged English version at the end of the text*

**Abstract** — **Transient natural convection in a repetitive geometry periodically heated from below: analysis by Fast Fourier Transform.** Transient natural convection in a repetitive geometry, periodically heated from below with a temperature that varies sinusoidally with time, is studied numerically. The governing equations are written in stream function – vorticity formulation and solved using a finite-difference procedure. The effect of the control parameters such as the Rayleigh number, the dimensionless amplitude and period of the variable input temperature on the dynamical and thermal behaviors of the fluid (air) is investigated. The geometrical parameters are maintained constant. The spectral analysis is used to identify the oscillation frequencies present in the various investigated signals. © 1999 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

**transient natural convection / variable heating / repetitive geometry / spectral analysis / numerical study**

**Résumé** — On étudie numériquement la convection naturelle instationnaire d'un fluide (air) confiné dans une géométrie répétitive chauffée périodiquement par le bas, la température variant de façon sinusoïdale dans le temps. Les équations qui régissent le système sont écrites en formulation «fonction de courant – vorticité» et intégrées à l'aide d'une méthode aux différences finies. La grande sensibilité des comportements dynamique et thermique du fluide vis-à-vis des variations de paramètres de contrôle, tels que le nombre de Rayleigh, l'amplitude et la période adimensionnelles de la température variable, est mise en évidence. Les paramètres géométriques sont maintenus constants. L'analyse spectrale est utilisée pour identifier les fréquences présentes dans les différents signaux étudiés. © 1999 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

**convection naturelle instationnaire / chauffage variable / géométrie répétitive / analyse spectrale / étude numérique**

## Nomenclature

$a$	amplitude adimensionnelle de la température variable ( $= a' / (\overline{T}'_C - T'_F)$ )	
$A$	paramètre géométrique adimensionnel ( $= L' / H'$ )	
$B$	paramètre géométrique adimensionnel ( $= h' / H'$ )	
$C$	paramètre géométrique adimensionnel ( $= l' / H'$ )	
$f$	fréquence adimensionnelle ( $= 1/\tau$ )	
$g$	accélération de la pesanteur . . . . .	$m \cdot s^{-2}$

$\bar{h}$	coefficient de transfert de chaleur moyen . . . . .	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$h'$	hauteur d'une cavité ouverte . . . . .	m
$H'$	hauteur du domaine de calcul . . . . .	m
$l'$	largeur de la base d'une cavité ouverte	m
$L'$	longueur du domaine de calcul . . . . .	m
$P(X)$	densité spectrale de puissance de la variable $X$	
$Pr$	nombre de Prandtl [ $= \nu/\alpha$ ]	
$Q_F$	quantité de chaleur moyenne adimensionnelle évacuée par le système [éq. (6)]	
$Ra$	nombre de Rayleigh [ $= g \beta \Delta T' H'^3 / \nu \alpha$ ]	
$t$	temps adimensionnel [ $= t' / (H'^2 / \alpha)$ ]	
$T$	température adimensionnelle [ $= (T' - T'_F) / (\overline{T}'_C - T'_F)$ ]	

\* Correspondance et tirés à part.  
 hasnaoui@ucam.ac.ma

$\Delta T'$	différence de température [= $\overline{T}'_C - T'_F$ ]
$(u, v)$	composantes adimensionnelles de la vitesse dans les directions $x$ et $y$ [= $(u', v') / (\alpha / H')$ ]
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles [= $(x', y') / H'$ ]

*Lettres grecques*

$\alpha$	diffusivité thermique du fluide.....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\beta$	coefficient volumétrique d'expansion thermique du fluide .....	$K^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique .....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle [= $\Psi' / \alpha$ ]	
$\Omega$	vorticité adimensionnelle [= $\Omega' H'^2 / \alpha$ ]	
$\tau$	période adimensionnelle de la température variable [= $\tau' / (H'^2 / \alpha)$ ]	

*Exposants*

(')	variables dimensionnelles
(—)	valeurs moyennes
max	grandeur maximale dans le temps
min	grandeur minimale dans le temps

*Indices*

C	paroi chaude
ex	excitation du système
ext	extremum
F	paroi froide
max	grandeur maximale dans l'espace
min	grandeur minimale dans l'espace
r	réponse du système

## 1. INTRODUCTION

L'étude des transferts thermiques joue un rôle important dans la conception et l'amélioration des systèmes physiques relevant du domaine de l'ingénierie. Parmi ces applications, on peut citer notamment le refroidissement des composants électroniques. Dans ce dernier cas, la tendance à la miniaturisation entraîne une amélioration évidente de la performance des circuits, mais, d'un autre côté, la quantité de chaleur dissipée par unité de volume subit une augmentation importante [1, 2]. Un contrôle thermique adéquat s'avère donc nécessaire afin d'éviter d'éventuels problèmes de surchauffe pouvant endommager ces dispositifs électroniques. Aussi est-il intéressant d'étudier les transferts thermiques par convection naturelle dans un canal muni de blocs rectangulaires sur l'une de ses faces internes. Divers travaux portent déjà sur ce type de configuration, moyennant des approches numériques [2-5] ou expérimentales [6-9]. Hasnaoui et al. [4] ont étudié numériquement la convection

naturelle dans un canal horizontal comportant un nombre infini de blocs adiabatiques placés sur sa paroi inférieure, afin d'examiner principalement l'effet de la hauteur relative de ces blocs (paramètre  $B$ ) sur les champs de température et d'écoulement. Ils en concluent que les valeurs des nombres de Rayleigh engendrant le démarrage de la convection et celles caractérisant la transition vers des solutions oscillantes augmentent avec  $B$ . L'augmentation de ce paramètre induit également une destruction de la symétrie de l'écoulement stationnaire observée pour  $B = 1/8$  et complique la structure de l'écoulement. En considérant la même géométrie avec des blocs chauffants, l'étude menée par Amahmid et al. [5] a consisté à examiner l'influence du choix du domaine de calcul sur la multiplicité des solutions. Cette investigation a montré que la symétrie de l'écoulement n'est pas toujours préservée, malgré la symétrie des conditions aux limites et que, en fonction de la hauteur relative des blocs et du nombre de Rayleigh, l'existence de deux et quatre solutions a été prouvée respectivement pour  $1/8 \leq B \leq 1/4$  et  $B = 1/2$ . Pour un ensemble donné de paramètres de base, le transfert de chaleur donné par deux solutions peut subir des différences allant jusqu'à 25 %.

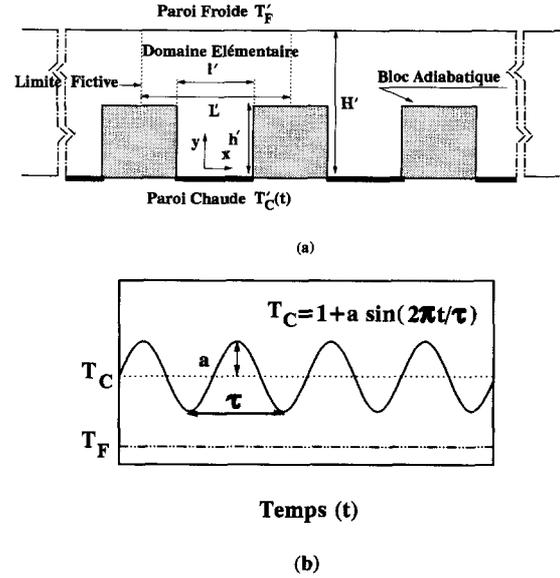
La présente étude s'intéresse au problème de la convection naturelle instationnaire développée au sein d'une géométrie répétitive assujettie à des conditions thermiques dépendant du temps. Il existe une imposante littérature relative aux phénomènes thermoconvectifs instationnaires résultant de conditions de chauffage constantes ou variables. Lorsque les conditions aux limites thermiques sont constantes, les phénomènes instationnaires s'observent généralement dans des problèmes qui s'apparentent aux écoulements de Rayleigh-Bénard [10-17]. Dans ces travaux, les comportements dynamiques menant vers le chaos suivant l'un des trois chemins recensés (quasi-périodicité, cascade sous-harmonique et intermittence) sont illustrés. La convection naturelle instationnaire s'observe naturellement si les conditions aux limites thermiques sont variables [18-20]). Dans le cas d'un chauffage périodiquement variable dans le temps, Kazmierczak et Chinoda [21] ont traité numériquement la convection naturelle dans une cavité chauffée par un côté en faisant varier la température sinusoidalement dans le temps. Le transfert de chaleur moyen (dans le temps) s'est révélé quasi insensible à l'évolution périodique de la température pariétale, puisque ces auteurs n'ont utilisé qu'une valeur modérée du nombre de Rayleigh ( $Ra = 1,5 \cdot 10^5$ ). Le cas d'une cavité chauffée périodiquement par le bas a été considéré par Mantle-Miller et al. [22], qui ont montré que l'effet du chauffage variable n'est ressenti en termes de transfert thermique que pour des amplitudes dépassant de 30 % la différence de température moyenne. En adoptant des approches numériques et analytiques, Lage et Bejan [23] se sont intéressés au phénomène de résonance au sein d'une enceinte carrée chauffée par un côté à l'aide d'un flux de chaleur pulsatoire. Plus récemment, Lakhali et al.

[24] ont entrepris une étude comparative de la réponse d'une enceinte carrée soumise à deux types d'excitations thermiques variables (sinusoïdale et pulsatoire). Ces différents travaux ont démontré l'intérêt de considérer des conditions aux limites thermiques variables, puisque le comportement du fluide, dans ce cas, ne peut être prédit à partir des résultats obtenus avec des conditions de température ou de flux de chaleur constants. Mais ils restent toutefois incomplets, sans interrogation sur l'existence de scénarios de transitions vers des régimes plus complexes, notamment le chaos, liée à la variation d'un paramètre caractérisant l'excitation extérieure. L'imposition des conditions aux limites qui dépendent du temps permet, à l'aide d'un choix convenable des paramètres de contrôle, de supprimer le chaos dans des conditions où il existe normalement [25], ou bien de le faire apparaître là où il ne devrait pas exister [26, 27]. Ainsi, ces derniers auteurs ont simulé numériquement la convection naturelle instationnaire dans une enceinte carrée chauffée par un côté, la température variant sinusoidalement dans le temps, pour analyser l'effet de l'amplitude de la température excitatrice sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh caractérisant les transitions entre les différents régimes : périodique, quasi périodique à deux fréquences, quasi périodique à 3 fréquences et chaotique. Ces valeurs critiques sont d'autant plus faibles que l'amplitude est élevée.

Quant à nous, nous nous proposons de modéliser numériquement le problème de la convection naturelle instationnaire dans une géométrie répétitive en imposant une température chaude, périodiquement variable dans le temps. Tous les paramètres géométriques du problème sont fixés et la relation existant entre la fréquence de la température excitatrice et celle(s) fondamentale(s) résultant de la réponse du système à l'excitation est examinée, l'amplitude (de l'excitation) étant considérée comme le paramètre principal de l'étude. Les signaux ainsi obtenus sont identifiés par le biais d'une analyse spectrale utilisant l'algorithme *FFT* (*Fast Fourier Transform*) de Cooley et Tukey [16].

## 2. MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le système physique étudié et l'allure de la température excitatrice imposée sont représentés sur la *figure 1*. La périodicité spatiale et celle relative aux conditions aux limites thermiques permettent, par un choix judicieux du domaine de calcul, de réduire l'effort informatique et le temps de calcul si on restreint l'étude au plus petit domaine représentatif, comme indiqué sur la *figure 1a*. Le module considéré est limité par des parois fictives verticales et chauffé localement par le bas à l'aide d'une température  $T'_C$ , qui varie de manière sinusoïdale dans le temps. La température  $T'_F$  de la paroi supérieure froide est maintenue constante ( $T'_F \leq T'_C$ ). Les blocs séparant les éléments chauffants sont considérés adiabatiques. Pour l'écoulement laminaire et bidimensionnel



**Figure 1. a.** Configuration étudiée. **b.** Allures des températures excitatrices imposées.

**Figure 1. a.** Studied configuration. **b.** Shapes of imposed temperatures of excitation.

d'un fluide newtonien (air) obéissant à l'approximation de Boussinesq, les équations adimensionnelles qui régissent le système, écrites en formulation «fonction de courant - vorticité», sont :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u \Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v \Omega)}{\partial y} = -Ra Pr \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] + Pr \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u T)}{\partial x} + \frac{\partial(v T)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad \text{avec} \quad u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$

Les conditions aux limites hydrodynamiques sont caractérisées par l'imperméabilité des parois rigides et le non-glisserment des particules fluides sur celles-ci, ce qui donne  $u = v = \Psi = 0$  sur ces parois.

Les conditions aux limites thermiques sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} T &= 1 + T_{ex} && \text{pour } y = 0 \text{ et } -C/2 \leq x \leq C/2 \\ T &= 0 && \text{pour } y = 1 \text{ et } -A/2 \leq x \leq A/2 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 && \text{pour les parois adiabatiques} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

avec  $T_{ex} = a \sin(2\pi t/\tau)$ , qui est une excitation caractérisant l'évolution sinusoïdale de la température chaude ;  $n$  désigne la direction de la normale à l'élément de surface consid er e.

Sur les limites fictives du domaine, on utilise des conditions de périodicité définies, pour  $1/2 \leq y \leq 1$ , par :

$$\Gamma(-1/2, y, t) = \Gamma(1/2, y, t) \quad (5)$$

avec  $\Gamma$  désignant  $T, \Psi$  ou  $\Omega$ .

À chaque pas de temps, la quantité de chaleur moyenne adimensionnelle quittant le domaine à travers sa paroi froide est calculée au moyen de l'expression suivante :

$$Q_F(t) = \frac{\bar{h}(t) H'}{\lambda} = -\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\partial T(x,1,t)}{\partial y} dx \quad (6)$$

En régime périodique établi, le flux de chaleur moyenné dans le temps, est donné par

$$\bar{Q}_F = \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} Q_F(t) dt \quad (7)$$

où  $\tau_r$  est la période principale de la réponse du système excité qui peut être égale ou différente de la période  $\tau$  de l'excitation.

### 3. MODÈLE NUMÉRIQUE

La méthode de résolution utilisée est basée sur un schéma numérique aux différences finies évolutif dans le temps, adapté à l'étude de la convection instationnaire induite lorsque des conditions aux limites thermiques variables dans le temps sont imposées au système, ou lorsque la valeur de  $Ra$  est supérieure à une valeur critique engendrant un état final oscillant, même pour une différence de température constante. En raison de leur nature parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, les équations de transport, de vorticité et d'énergie [équations (1) et (2)] ont été intégrées par la méthode implicite aux directions alternées (ADI). La vorticité sur les parois solides du système est évaluée

par extrapolation à partir des nœuds intérieurs, suivant la méthode de Woods [28] par :

$$\Omega_p = -\frac{1}{2}\Omega_{p+1} - 3 \left( \frac{\Psi_{p+1} - \Psi_p}{\Delta n^2} \right) \quad (8)$$

$p$  désignant une paroi rigide et  $\Delta n$  le pas d'espace dans la direction normale à cette paroi.

L'équation de Poisson (équation (3)), exprimant la vorticité en fonction des dérivées partielles secondes de  $\Psi$  est résolue par la méthode explicite de sur-relaxation par point (SOR), qui n'est autre que la méthode itérative de Gauss-Seidel relaxée. Afin d'accélérer la convergence de la fonction de courant, un paramètre de sur-relaxation optimum, de valeur 1,86 pour le maillage considéré, a été calculé en appliquant la formule de Frankel [29]. Pour satisfaire l'équation de continuité, le critère

$$\left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{n+1} - \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^n \right| / \left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{n+1} \right| \leq 10^{-4}$$

est vérifié à chaque pas de temps. Le paramètre  $n$  est un entier inférieur ou égal au nombre d'itérations maximum  $n_{\max}$  fixé au préalable. Le champ de vitesse est ensuite déduit de celui de la fonction de courant en utilisant, pour les dérivations de  $\Psi$ , des différences centrées précises d'ordre 2. Le transfert de chaleur est calculé à partir de l'équation (6), en utilisant la méthode d'intégration de Simpson. Les essais préliminaires, effectués pour tester la sensibilité des solutions au choix du maillage, ont montré qu'un maillage uniforme de  $41 \times 41$  est suffisant pour modéliser correctement l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans le module sélectionné. À titre indicatif, on présente, dans le *tableau I*, l'effet du maillage en considérant un chauffage constant et un autre variable. Pour le premier, les tests ont porté sur deux valeurs de  $Ra$  ( $10^6$  et  $1,4 \cdot 10^6$ ), conduisant respectivement à un régime stationnaire et à un autre, oscillant, monopériodique. Pour le second, deux valeurs typiques de la période  $\tau$  (0,006 et 2) et de l'amplitude  $a$  (0,9 et 1) ont été utilisées en fixant la valeur du nombre de Rayleigh à  $Ra = 10^6$ . Les différences maximales enregistrées lorsqu'on utilise un maillage de  $41 \times 41$  et un autre, plus fin,

Maillage	Chauffage constant				Chauffage variable ( $Ra = 10^6$ )			
	$Ra = 10^6$		$Ra = 1,4 \cdot 10^6$		$a = 1$ et $\tau = 0,006$		$a = 0,9$ et $\tau = 2$	
	$Q_F$	$\Psi_{\max}$	$\bar{Q}_F$	$\bar{\Psi}_{\max}$	$Q_F$	$\Psi_{\max}$	$\bar{Q}_F$	$\bar{\Psi}_{\max}$
$33 \times 33$	3,2	27	3,52	31,38	4,11	33,31	3,43	25,25
$41 \times 41$	3,33	27,75	3,64	32,2	4,1	33,28	3,55	25,35
$57 \times 57$	3,39	28,15	3,71	33,1	4,04	32,45	3,6	25,88

de  $57 \times 57$ , restent en deçà de 1,9 et de 2,9 %, respectivement en termes de  $\overline{Q}_F$  et  $\overline{\Psi}_{ext}$ . En effectuant différents tests préliminaires et en prenant en considération la nature instationnaire des solutions, il en résulte que les pas de temps adimensionnels considérés dans cette étude sont  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$  et  $8 \cdot 10^{-5}$ , respectivement pour  $10^5 \leq Ra < 10^6$  et  $10^6 \leq Ra$ , à l'exception des simulations relatives au chauffage variable, où le pas de temps a été réduit à  $2 \cdot 10^{-5}$  pour  $\tau = 0,006$ . Le temps adimensionnel est incrémenté à chaque pas, jusqu'à ce que sa valeur maximale, initialement imposée comme test d'arrêt des calculs, soit atteinte. Le code numérique a été validé en comparant les résultats de ce programme, obtenus en l'absence de l'excitation, avec ceux de Hasnaoui et al. [4]. L'accord a été trouvé excellent, vu que les écarts maximums enregistrés en termes de  $Q$  et  $\Psi$  n'ont pas dépassé 1 %. D'autres tests ont été effectués en procédant à un bilan d'énergie pour le module. En fait, étant donné que les parois non thermiquement actives sont adiabatiques et du fait des conditions de périodicité, considérées sur les limites fictives du domaine de calcul, toute l'énergie fournie au fluide par la paroi chaude doit quitter le système à travers la paroi froide. Ce bilan a été vérifié à 1,5 % dans les cas les plus défavorables.

#### 4. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les fréquences fondamentales caractérisant la réponse du système à l'excitation, les variations temporelles de  $Q_F$  et les spectres de puissance correspondants, ainsi que les taux de transfert de chaleur extremums, seront examinés pour différentes amplitudes et périodes de la température excitatrice. Toutes les analyses ont été menées en considérant les paramètres géométriques constants ( $A = L'/H' = 1$ ,  $B = h'/H' = 1/2$  et  $C = l'/H' = 1/2$ ),  $Pr = 0,72$ ,  $0 \leq a \leq 1$ ,  $6 \cdot 10^{-3} \leq \tau \leq 2$  et  $10^5 \leq Ra \leq 3,5 \cdot 10^6$ .

##### 4.1. Cas du chauffage constant ( $a = 0$ )

Comme on s'intéresse à des nombres de  $Ra$  suffisamment élevés, la première exécution du programme a été effectuée pour  $Ra = 10^6$ , en considérant un état de repos et un champ de température proche de celui de la conduction et en imposant un gradient de température linéaire dans la direction verticale. Ce champ de température ne correspond pas exactement à celui d'un régime conductif pur, pour lequel les isothermes sont légèrement bombées dans la partie supérieure du domaine. Pour les autres valeurs de  $Ra$ , des solutions intermédiaires, obtenues lors de précédentes exécutions du code numérique, ont été utilisées comme conditions initiales.

En maintenant, dans un premier temps, les températures  $T'_C$  et  $T'_F$  constantes, on a montré numériquement que la convection stationnaire transite vers une convection dépendant du temps lorsque  $Ra$  croît. En effet, la convection stationnaire devient oscillante, monopériodique, de fréquence  $f = 109,86$  pour  $Ra = 1,1 \cdot 10^6$ , puis bipériodique de fréquences  $f_1 = 64,08$  et  $f_2 = 131,22$  pour  $Ra = 1,5 \cdot 10^6$ , enfin chaotique pour  $Ra = 3,5 \cdot 10^6$ . Les deux fréquences de base augmentent avec  $Ra$ , comme on peut le voir sur la figure 2. Une telle variation a été confirmée expérimentalement par Gollub et Benson [14], et numériquement par Mukutmoni et Yang [11].

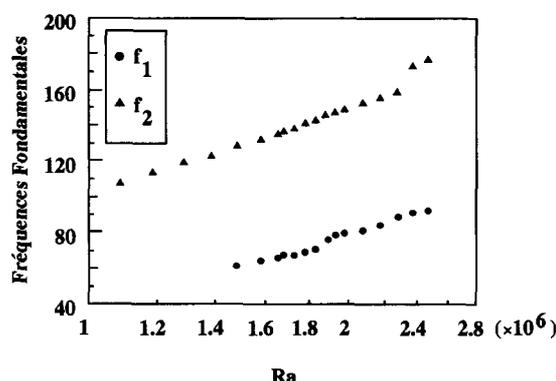


Figure 2. Variations des fréquences fondamentales de la réponse du système en fonction de  $Ra$ , pour le cas du chauffage constant.

Figure 2. Variations of the fundamental frequencies of the system response with  $Ra$  for the case of constant heating.

##### 4.2. Cas du chauffage variable

Pour étudier l'effet du chauffage variable,  $Ra$  a été fixé à  $10^6$ , valeur aboutissant au régime stationnaire pour  $a = 0$ , et l'amplitude  $a$  de la température excitatrice a été augmentée progressivement en considérant deux valeurs typiques de  $\tau$  ( $\tau = 0,006$  et  $2$ ), qui engendrent des réponses fondamentalement différentes du système. Pour ce type de chauffage, l'initialisation du programme a été effectuée à partir de la solution permanente obtenue pour  $Ra = 10^6$ . Quelques cas initialisés à partir du repos ont conduit au même résultat final, mais elles ont nécessité un temps de calcul relativement plus long.

###### 4.2.1. Cas d'une faible période ( $\tau = 0,006$ )

Les résultats de l'analyse de quelques régimes dynamiques correspondant à  $\tau = 0,006$ , qui s'instaurent suite à une augmentation progressive de  $a$ , sont regroupés dans le tableau II. En effet, en introduisant une excitation de période  $\tau = 0,006$  et d'amplitude

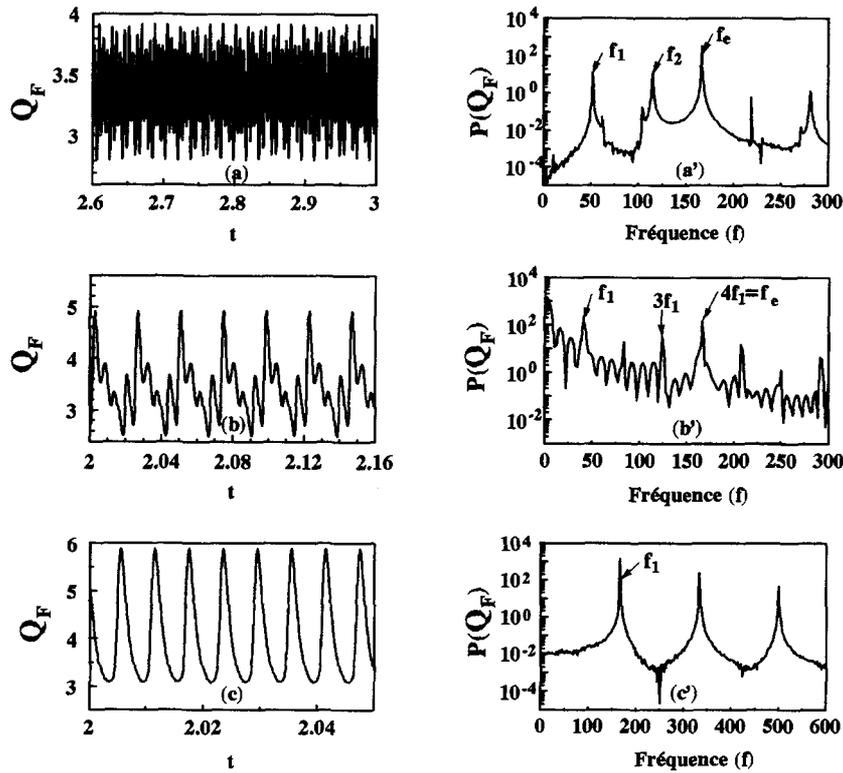
TABLEAU II / TABLE II				
Résultats de l'analyse spectrale des signaux de $Q_F$ , $\Psi_{\max}$ et $\Psi_{\min}$ obtenus pour $\tau = 0,006$ et différentes valeurs de $a$ .				
$P_1$ : monopériodique (sinusoidal) ; $P$ : périodique ; $QP_2$ : quasi périodique à 2 fréquences.				
Results of spectral analysis of $Q_F$ , $\Psi_{\max}$ and $\Psi_{\min}$ signals obtained for $\tau = 0.006$ and various $a$ values. $P_1$ : periodic state with a single frequency ; $P$ : periodic state ; $QP_2$ : quasi periodic state with 2 frequencies.				
a	Fréquences fondamentales	$f_0 = f_{ex}$	$f_0 = m_1 f_1 + m_2 f_2$	Nature du régime
0,1	166,83	166,83	$f_1$	$P_1$
0,2	166,83	-	$f_1$	$P_1$
0,3	$f_1 = 51,88$ ; $f_2 = 114,95$	-	$f_1 + f_2$	$QP_2$
0,4	$f_1 = 46,79$ ; $f_2 = 120,04$	-	$f_1 + f_2$	$QP_2$
0,5	$f_1 = 41,71$ ; $f_2 = 125,12$	-	$f_1 + f_2 = 4f_1$	$P$
0,6	$f_1 = 35,604$ ; $f_2 = 47,811$	-	$2(f_1 + f_2)$	$QP_2$
0,7	$f_1 = 27,466$ ; $f_2 = 55,949$	-	$2(f_1 + f_2)$	$QP_2$
0,8	$f_1 = 24,414$ ; $f_2 = 62,052$	-	$17f_1 - 4f_2$	$QP_2$
0,9	166,83	-	$f_1$	$P_1$
1	166,83	-	$f_1$	$P_1$

$a = 0,1$ , la convection stationnaire observée pour  $a = 0$  disparaît au profit d'une autre, oscillante périodique, de fréquence  $f_0 = 166,83$ , très proche de celle de l'excitation ( $f_{ex} = 166,67$ ). Le comportement de la solution change cependant pour  $a = 0,3$  (figure 3a) et devient quasi périodique à deux fréquences  $f_1 = 51,88$  et  $f_2 = 114,95$ , dont le rapport  $f_2/f_1$  est irrationnel (figure 3a'). Le spectre de puissance de  $Q_F$  révèle la présence d'une raie d'amplitude, très significative, à la fréquence  $f_0 = 166,83 = f_1 + f_2$  (figure 3a'). La quasi-périodicité des solutions se maintient aussi pour  $a = 0,4$  et les deux fréquences de base évoluent de manière différente (tableau II et figure 4). Lorsque  $a$  atteint la valeur 0,5, un accrochage de fréquences se produit ; le rapport  $f_2/f_1$  devient rationnel, et le comportement du système est qualifié de périodique (une seule fréquence fondamentale). La fréquence d'accrochage n'est autre que la fréquence fondamentale  $f_1 = 41,71$ , bien visible dans le spectre de puissance de  $Q_F$ , ainsi que ses harmoniques, dont  $f_0 = 4f_1$ , qui correspond toujours à une raie d'amplitude significative (figures 3b-3b'). Lorsque  $a$  prend la valeur 0,6, la fréquence  $f_2 = 47,811$  apparaît à côté de la fréquence  $f_1 = 35,604$  dans le spectre de puissance de  $Q_F$ . Leur rapport irrationnel confirme le retour du comportement quasi périodique du système, qui persiste jusqu'à  $a = 0,8$ . Dans les intervalles de  $a$  engendrant un comportement quasi périodique des solutions, la fréquence  $f_2$  croît avec  $a$  ; en revanche,  $f_1$  décroît avec ce paramètre et  $f_0$  s'obtient toujours en combinant linéairement ces deux fréquences, comme indiqué dans le tableau II. Enfin, lorsque  $a$  prend les valeurs 0,9 et 1, les oscillations de  $Q_F$  deviennent simples et régulières présentant une allure proche d'une sinusoïde, comme illustré sur la figure 3c pour  $a = 0,9$ .

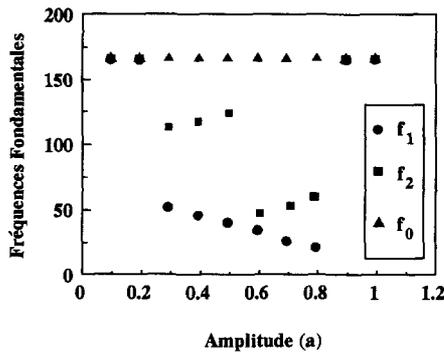
Le spectre de puissance correspondant (figure 3c') est caractéristique d'un régime monopériodique, avec une raie principale qui émerge à la fréquence  $f_1 = 166,83$ . Le passage d'un régime quasi périodique vers un autre périodique (ou l'inverse) n'est pas dû au changement de structure du fluide. En effet, l'examen des lignes de courant et des isothermes obtenues pour des valeurs de  $a$ , conduisant à des comportements périodiques ou quasi périodiques du système (résultats non présentés ici), a montré que la structure de l'écoulement ne subit pas de grandes modifications qualitatives.

#### 4.2.2. Cas d'une grande période ( $\tau = 2$ )

Le système se comporte différemment lorsqu'on introduit une excitation de période  $\tau = 2$ . En effet, pour cette valeur de  $\tau$ , le système répond à l'excitation avec des signaux presque sinusoïdaux de fréquence de base  $f_1 \approx 0,5$ , qui est la valeur de la fréquence d'excitation et ce, pour  $0 < a \leq 0,9$ . Ce comportement est illustré par les figures 5a et 5a' où l'évolution temporelle de  $Q_F$  et son spectre de puissance sont respectivement représentés pour  $a = 0,8$ . Ce n'est qu'à partir de  $a = 0,975$  que les oscillations sinusoïdales disparaissent au profit d'autres, présentant une double périodicité : une périodicité secondaire, due à des fluctuations de faibles amplitudes qui apparaissent sur une partie de la période principale (sinusoïde), comme indiqué sur la figure 5b. Le spectre de puissance du signal de  $Q_F$  révèle la présence d'une fréquence de base  $f_1 \approx 0,5$ , de ses harmoniques et de ceux de  $f_1/4$  (figure 5b'). En augmentant légèrement la valeur de  $a$  à 0,98, les variations de  $Q_F$  ont montré des oscillations presque aussi régulières que celles de



**Figure 3.** Variations temporelles et spectres de puissance de  $Q_F$  pour  $Ra = 10^6$  et  $\tau = 0,006$ . **a.**  $a = 0,3$ . **b.**  $a = 0,5$ . **c.**  $a = 0,9$ .  
**Figure 3.** Variations with time and power spectra of  $Q_F$  for  $Ra = 10^6$  and  $\tau = 0.006$ . **a.**  $a = 0,3$ . **b.**  $a = 0,5$ . **c.**  $a = 0,9$ .



**Figure 4.** Variations des fréquences fondamentales de la réponse du système en fonction de l'amplitude pour  $Ra = 10^6$  et  $\tau = 0,006$ .

**Figure 4.** Variations of the fundamental frequencies of the system response with the amplitude for  $Ra = 10^6$  and  $\tau = 0.006$ .

la figure 5b, mais présentant de temps à autre des fluctuations d'amplitude irrégulière. Notons aussi que l'augmentation de  $a$  (à partir de 0,98) est favorable à la croissance de l'amplitude des oscillations secondaires. Les fluctuations désordonnées apparaissant dans les

signaux ont une durée de vie moyenne qui s'allonge avec  $a$ , après quoi elles disparaissent pour laisser place à de nouvelles oscillations régulières. Ces bouffées de chaos s'étendent sur les oscillations secondaires de quelques périodes principales et deviennent de plus en plus fréquentes à mesure que  $a$  s'approche de 1, sa valeur limite maximale. Un tel comportement, qualifié d'aléatoire, est illustré sur les figures 5c et 5c', présentant respectivement le signal temporel de  $Q_F$  et son spectre de puissance pour  $a = 1$ . L'allure de ce signal montre que le comportement sinusoïdal observé pour  $a < 0,98$  est altéré par des fluctuations désordonnées. Le spectre de puissance reste cependant toujours dominé par une raie qui émerge à la fréquence  $f_1 \approx 0,5$ .

#### 4.2.3. Effet de l'amplitude sur les valeurs minimales et maximales

Pour quantifier l'effet de l'amplitude, on présente les variations, en fonction de  $a$ , des pertes de chaleur extrêmes  $Q_F^{\text{ext}}$  ( $Q_F^{\text{ext}}$  désignant  $Q_F^{\text{max}}$  ou  $Q_F^{\text{min}}$ ) obtenues pour  $\tau = 0,006$  (figure 6a) et  $\tau = 2$  (figure 6b) et différentes valeurs de  $Ra$ . Il est utile de rappeler qu'en l'absence de l'excitation ( $a = 0$ ), la valeur  $Ra = 1,4 \cdot 10^6$

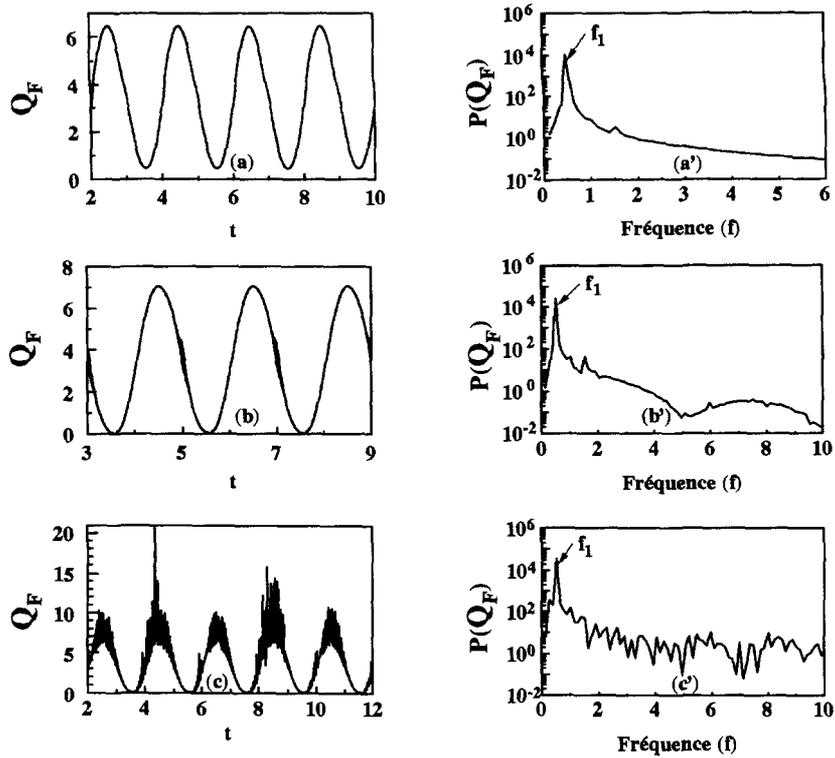


Figure 5. Variations temporelles et spectres de puissance de  $Q_F$  pour  $Ra = 10^6$  et  $\tau = 2$ . a.  $a = 0,8$ . b.  $a = 0,98$ . c.  $a = 1$ .  
 Figure 5. Variations with time and power spectra of  $Q_F$  for  $Ra = 10^6$  and  $\tau = 2$ . a.  $a = 0,8$ . b.  $a = 0,98$ . c.  $a = 1$ .

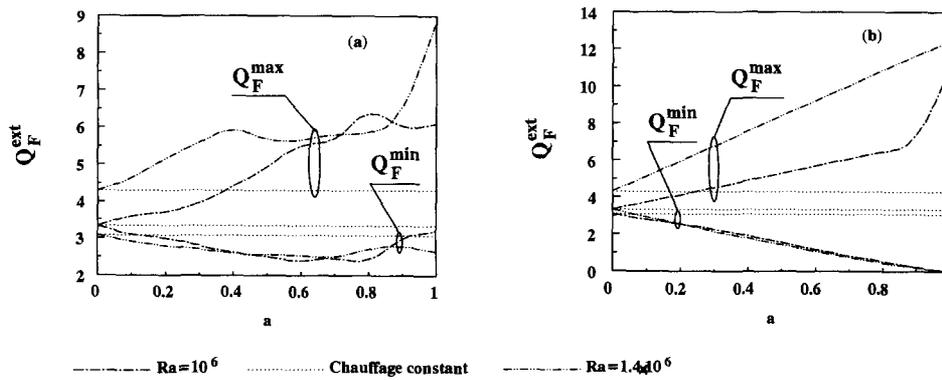


Figure 6. Variations des valeurs minimales et maximales de  $Q_F$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $Ra$ . a.  $\tau = 0,006$ . b.  $\tau = 2$ .  
 Figure 6. Variations of extremum values of  $Q_F$  versus  $a$  for various values of  $Ra$ . a.  $\tau = 0,006$ . b.  $\tau = 2$ .

induit un régime oscillant monopériodique. Globalement, on peut noter que les fonctions  $Q_F^{\max}/Q_F^{\min}$  subissent une augmentation/diminution notable avec  $a$ , dès que ce paramètre devient supérieur ou égal à 0,1. Leurs variations sont relativement complexes pour  $\tau = 0,006$  (figure 6a) et monotones linéaires pour  $\tau = 2$  (figure 6b). Remarquons qu'à l'encontre du cas

relatif à  $\tau = 0,006$ , les courbes de  $Q_F^{\min}$  correspondant à  $\tau = 2$  sont presque confondues et convergent vers zéro lorsque  $a$  tend vers 1. Ceci résulte du fait que, lorsque  $a$  atteint sa valeur limite 1, la température adimensionnelle de la paroi chaude s'anule, conformément à la loi de variation de  $T_C$  (équation (4)) aux instants  $t_k = (\tau/4)(2k - 1)$  ( $k$  entier rela-

tif). Les températures des parois actives du système deviennent alors identiques et le fluide a suffisamment de temps ( $\tau$  est grand) pour retourner vers un état proche du repos, caractérisé par une annulation asymptotique de  $Q_F$ ,  $T_C$ ,  $\Psi_{max}$  et  $\Psi_{min}$ , comme l'indiquent les variations temporelles de ces fonctions, présentées sur la figure 7 pour  $Ra = 10^6$ . Il est intéressant de signaler qu'on a pu mettre en évidence l'existence d'une période critique  $\tau_c$ , à partir de laquelle ce phénomène se manifeste en considérant  $a = 1$ ,  $0,1 \leq \tau < 2$  et  $10^5 \leq Ra \leq 1,4 \cdot 10^6$ . Les résultats correspondant aux différents tests effectués pour la détermination de  $\tau_c$  sont résumés dans le tableau III.

#### 4.2.4. Effet de l'amplitude sur les valeurs moyennes

Les résultats concernant l'effet de l'amplitude sur les valeurs moyennes de  $\Psi_{ext}$  et  $Q_F$  ( $\bar{\Psi}_{ext}$  et  $\bar{Q}_F$ ) montrent une nette amélioration de ces grandeurs par rapport au cas du chauffage constant, lorsqu'on augmente l'amplitude de la température excitatrice et qu'on impose à cette dernière une faible période. À titre indicatif, les améliorations enregistrées pour  $\tau = 0,006$  en ce qui concerne  $\bar{Q}_F$ , par rapport au régime permanent, sont de l'ordre de 4, 14 et 24,3 %, pour, respectivement,  $a = 0,6, 0,8$  et 1. Cependant, pour une valeur élevée de  $\tau$  ( $\tau = 2$ ), les valeurs moyennes de  $\bar{\Psi}_{ext}$  subissent une nette réduction accompagnée d'une amélioration négligeable de  $\bar{Q}_F$ , qui devient perceptible uniquement lorsque  $a$  atteint sa valeur limite 1. À ce propos, la réduction maximale de  $\bar{\Psi}_{max}$  par rapport au régime permanent, observée pour  $\tau = 2$ , atteint 3,2, 6,4 et 12,6 %, pour, respectivement,  $a = 0,6, 0,8$  et 1, alors que l'amélioration maximale en termes de  $\bar{Q}_F$  par rapport aux valeurs obtenues en l'absence de l'excitation ( $a = 0$ ) atteint 0,8, 1,6 et 10 %, respectivement, pour  $a = 0,6, 0,8$  et 1.

## 5. CONCLUSION

L'étude numérique de l'écoulement et du transfert de chaleur par convection naturelle transitoire dans une géométrie répétitive localement chauffée par le bas à l'aide d'une température variable dans le temps a permis de retenir les conclusions suivantes :

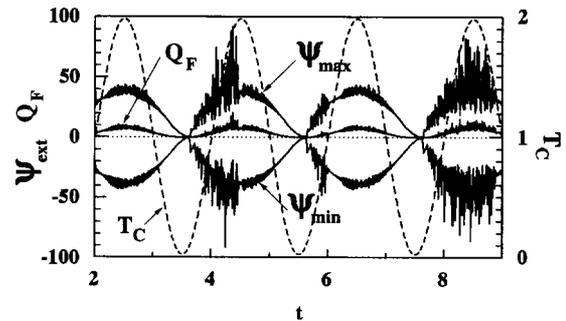


Figure 7. Variations temporelles de  $Q_F$ ,  $\Psi_{max}$ ,  $\Psi_{min}$  et  $T_C$  pour  $Ra = 10^6$ ,  $a = 1$  et  $\tau = 2$ .

Figure 7. Variations with time of  $Q_F$ ,  $\Psi_{max}$ ,  $\Psi_{min}$  and  $T_C$  for  $Ra = 10^6$ ,  $a = 1$  and  $\tau = 2$ .

- une variation paramétrique de l'amplitude et de la période de la température excitatrice imposée au système conduit à des comportements périodique, quasi périodique ou aléatoire, au lieu du régime stationnaire observé en maintenant les températures des parois actives à des valeurs constantes ;
- pour une période relativement faible ( $\tau = 0,006$ ), l'effet de l'accroissement progressif de l'amplitude  $a$  sur la réponse du système se traduit par une évolution vers des régimes dynamiques et thermiques complexes, avant le retour au régime monopériodique qui persiste pour  $a > 0,8$  ;
- pour une valeur élevée de la période ( $\tau = 2$ ), les effets les plus importants de l'amplitude  $a$  ne sont observés que pour des valeurs élevées de ce paramètre ( $a \geq 0,975$ ) ;
- le chauffage variable engendre une nette augmentation de  $\bar{Q}_F$  par rapport au cas du chauffage constant pour  $\tau = 0,006$ , lorsque l'amplitude de l'excitation thermique est élevée. Cette augmentation reste généralement négligeable pour  $\tau = 2$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] Hwang U.P., Moran K.P., Boiling heat transfer of silicon integrated circuits chip mounted on a substrate, in : Kelleher M.D., Yovanovich X. (éds), Heat Transfer in Electronic Equipment, ASME, New York, HTD 20 (1981) 53-59.

TABLEAU III / TABLE III				
Périodes critiques d'annulations asymptotiques de $Q_F$ , $\Psi_{max}$ et $\Psi_{min}$ obtenues pour $a = 1$ et différentes valeurs de $Ra$ .				
Critical periods of asymptotic cancellations of $Q_F$ , $\Psi_{max}$ and $\Psi_{min}$ obtained for $a = 1$ and various values of $Ra$ .				
$Ra$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$1,4 \cdot 10^6$
$\tau_c$	$0,4 \leq \tau_c < 0,45$	$1,1 < \tau_c \leq 1,2$	$1,4 < \tau_c \leq 1,5$	$1,75 \leq \tau_c < 1,8$

- [2] Braaten J., Patankar S.V., Analysis of laminar mixed convection in shrouded arrays of heated rectangular blocks, *Int. J. Heat Mass Tran.* 28 (1985) 1699–1709.
- [3] Davalath J., Bayazitoglu Y., Forced convection coolings across rectangular blocks, *J. Heat Trans.-T. ASME* 109 (1987) 321–328.
- [4] Hasnaoui M., Bilgen E., Vasseur P., Natural convection above an array of open cavities heated from below, *Numer. Heat Trans.* 18 (1990) 463–482.
- [5] Amahmid A., Hasnaoui M., Vasseur P., Multiplicité des solutions en convection naturelle dans une géométrie répétitive, *Int. J. Heat Mass Tran.* 40 (1997) 3805–3818.
- [6] Sparrow E.M., Niethammer J.E., Chaboki A., Heat transfer and pressure drop characteristics equipments of arrays of rectangular modules encountered in electronic equipment, *Int. J. Heat Mass Tran.* 25 (1982) 961–973.
- [7] Park K.A., Bergles A.E. Natural convection heat transfer characteristics of simulated microelectronic chips, *J. Heat Trans.-T. ASME* 109 (1987) 90–96.
- [8] Liou T.M., Hwang J.J., Turbulent heat transfer augmentation and friction in periodic fully developed channels flows, *J. Heat Trans.-T. ASME* 114 (1992) 56–64.
- [9] Aliaga D.A., Lamb J.P., Klein D.E., Convection heat transfer distributions over plates with square ribs from infrared thermography measurements, *Int. J. Heat Mass Tran.* 37 (1994) 363–374.
- [10] Meneguzzi M., Sulem C., Sulem P.L., Tuhai O., Three-dimensional numerical simulation of convection in low-Prandtl number fluids, *J. Fluid Mech.* 182 (1987) 169–191.
- [11] Mukutmoni D., Yang K.T., Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio enclosure : Part I-bifurcation to oscillatory convection, *J. Heat Trans.-T. ASME* 115 (1993) 360–366.
- [12] Mukutmoni D., Yang K.T., Thermal convection in small enclosures : an atypical bifurcation sequence, *Int. J. Heat Mass Tran.* 38 (1995) 113–126.
- [13] Busse F.H., Whitehead J.A., Oscillatory and collective instabilities in large Prandtl number convection, *J. Fluid Mech.* 66 (1974) 67–79.
- [14] Gollub P., Benson S.V., Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.* 100, Part 3 (1980) 449–470.
- [15] Gollub P., Benson S.V., Steinman J.F., A subharmonic route to turbulent convection, in : Helleman H.G. (ed.), *Nonlinear Dynamics*, New York Academy of Sciences, 1980, pp. 22–27.
- [16] Bergé P., *L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann, Paris, 1984.
- [17] Bergé P., *Le chaos : théorie et expérience*, Collection du CEA, Eyrolles, 1988.
- [18] Patterson J.C., Imberger J., Unsteady natural convection in a rectangular cavity , *Int. J. Fluid Mech.* 100 (1980) 65–86.
- [19] Nicolette V.F., Yang K.T., Lloyd J.R., Transient cooling by natural convection in a two-dimensional square enclosure, *Int. J. Heat Mass Tran.* 28 (1985) 1721–1732.
- [20] Hall J.D., Bejan A., Chaddock J.B., Transient natural convection in a rectangular enclosure with one heated side wall, *Int. J. Heat Fluid Fl.* 9 (1988) 396–404.
- [21] Kazmierczak M., Chinoda Z., Boundary-driven flow in an enclosure with time periodic boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Tran.* 35 (1992) 1507–1518.
- [22] Mantle-Miller W.J., Kazmierczak M., Hiawy B., Natural convection in a horizontal enclosure with periodically changing bottom wall temperature, in : *Natural Convection in Enclosures*, ASME 28th National Heat Transfer Conference, HTD 198, 1992, pp. 49–56.
- [23] Lage J.L., Bejan A. The resonance of natural convection in an enclosure heated periodically from the side, *Int. J. Heat Mass Tran.* 36 (1993) 2027–2038.
- [24] Lakhel E.K., Hasnaoui M., Vasseur P., Étude numérique de la convection naturelle transitoire au sein d'une cavité chauffée périodiquement avec deux types d'excitations, *Int. J. Heat Mass Tran.* (sous presse).
- [25] Lima R., Pettini M., Suppression of chaos by resonant parametric perturbations, *Phys. Rev. A* 41 (1990) 726–733.
- [26] Newton P.K., Chaos Rayleigh-Bénard convection with external driving, *Phys. Rev. A* 37 (1988) 332–334.
- [27] Xia Q., Yang K.T., Mukutmoni D., Effect of imposed wall temperature oscillations on the stability of natural convection in a square enclosure, *J. Heat Trans.* 117 (1995) 113–120.
- [28] Roache P., *Computational fluid dynamics*, Hermosa, Albuquerque, New Mexico, 1980.
- [29] Frankel S.P., Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *Math. Tables Aids Compt.* 4 (1950) 65–75.

### Abridged English Version

#### *Transient natural convection in a repetitive geometry periodically heated from below: analysis by Fast Fourier Transform*

Over the years, considerable research efforts have been devoted to the study of natural and mixed convections in repetitive geometries. This has been motivated by diverse engineering applications such as the cooling of electronic equipments for which the cooling operation must be properly done to avoid overheating. In many electronic situations, the electrical

components are frequently energized by a varying power supply (on-off switching for example). Therefore, the heat generated in an unsteady manner by the electronic devices must be evacuated to maintain their desired operating temperature. The economical method of cooling is air circulated by natural convection. Accordingly, a good understanding of transient natural

convection flow and heat transfer developed in repetitive geometries is of interest. The object of the present work is to study numerically transient natural convection developed in a repetitive geometry periodically heated from below with a temperature that varies sinusoidally with time. Special attention is given to the relationship between the frequency of the variable temperature and the fundamental frequency/frequencies corresponding to the system response to the excitation. In the numerical approach, the regular spacing of heating elements imposes a periodicity to the solution in the  $x$  direction. Hence, the domain to be solved numerically is restricted to a window of length  $C$ , with the requirement that periodicity conditions be used for the vertical fictive boundaries. The governing unsteady equations, written in terms of stream function vorticity formulation, were numerically solved by using a finite difference discretization procedure.

For  $Ra = 10^6$  and  $\tau = 0.006$ , the study has shown that, by increasing the amplitude of the variable temperature, the dynamical behavior of fluid appears to switch

between periodic and quasi-periodic states (*table II*). In addition, one or two basic frequencies appear in the corresponding power spectra, accompanied by a significant peak at a frequency identical to that of the imposed excitation. This frequency has been identified as a basic one (case of monoperiodic solution) or as a combination of two basic frequencies of the form  $f = m_1 f_1 + m_2 f_2$ , where  $m_1$  and  $m_2$  are integers. However, for  $\tau = 2$ , the effect of the amplitude leading to a change of the fluid behavior is observed at higher values of this parameter. In fact, the system response to the excitation remains singly periodic (sinusoidal) for  $a \leq 0.975$ . Above this threshold of  $a$ , the oscillations are regularly interrupted by intermittent noise. Nevertheless, a basic frequency, identical to that of the imposed temperature, appears in the corresponding power spectra. The study has also shown that, for  $\tau = 0.006$ , the variable heating induces a noticeable improvement of  $\overline{Q_F}$  with respect to the constant heating case. The maximum improvement is reached for  $a = 1$  and it is about 24 %. However, for  $\tau = 2$ , the improvement of  $\overline{Q_F}$  is generally negligible.

